QIMMATLI QOG‘OZLARDAN QUTILADIGAN DAROMADLAR VA ULARNING RISKINI MINIMALLASHTIRISH YO‘LLARI

Saipnazarov Shaylovbek Aktamovich
TDIU, “Amalaliy matematika” kafedrasi p.f.n., dotsenti

Fayziev Javlon Abduvoxidovich
TDIU, “Amalaliy matematika” kafedrasi katta o‘qituvchisi
https://doi.org/10.53885/edinres.2024.01.1.048

Annotasiya. Bu maqolada qimmatli qog‘ozlar portfelini optimal boshqarish haqida so‘z yuritildi. Nazariya va amaliyotda qimmatli qog‘ozlar portfelini boshqarishda ikki xil usuldan foydalaniladi: an’anaviy va zamonaviy. An’anaviy usulda qimmatli qog‘ozlar portfeli diversifikasiya orqali optimallashtiriladi. Bu maqolada esa matematik metodlarga asoslangan holda moliyaviy uskunalarni portfelga joylashtirish orqali qimmatli qog‘ozlar portfelini kutiladigan daromadi va riskini optimallashtirish masalasiga e’tibor berilgan.

Аннотация. В данной статье изучается оптимальное управление портфелем ценных бумаг. В теории и практике при управление портфелем ценных бумаг используют два метода: традиционней и современный. При традиционном подходе портфель ценных бумаг оптимизируется путем диверсификации. В данной статье уделено внимание задаче оптимизацииприбыли и риска портфеля ценных бумаг путем размещения в портфель финансовых инструментов, основанных на математических методах.

Abstract. This article studies optimal management of a securities portfolio. In theory and practice, two methods are used to manage a securities portfolio: traditional and modern.

With the traditional approach, the securities portfolio is optimized through diversification. This article focuses on the problem of optimizing profitability and risk of a securities portfolio by placing financial instruments based on mathematical methods in the portfolio.

Moliya bozorida ko‘p hollarda qimmatli qog‘ozlarga murojaat qilinadi: davlatning qimmatli qog‘ozlari, munitsipal obligasiyalar, korporativ aksiyalar va h.q. Agar bu bozorda ishtirok etuvchining ortiqcha mablag‘i bo‘lsa, u holda ularni bankka olib borib omonatga qo‘yish va foizlar olishi yoki unga qimmatli qog‘ozlar sotib olib daromad qilishi mumkin. Savol tug‘iladi; Qaysi bankka olib borish kerak? Kam riskli qimmatli qog‘ozlar kam daromadli, ko‘p daromadli qimmatli qog‘ozlar riski yuqori bo‘ladi. iqtisodiy ilm ma’lum darajada bu savolga echim topishga yordam beradi, albatta bu masalani echishda matematik apparat muhim rol o‘ynaydi.

Shunday qilib investor moliya bozorida shunday qimmatli qog‘ozlarni izlaydiki, u uchun qimmatli qog‘ozlar daromadi va riski uning hohishiga to‘g‘ri kelishi kerak bo‘ladi. qimmatli qog‘ozlar to‘plami qimmatli qog‘ozlar portfeli deyu yuritiladi. Nazariyada va amaliyotda portfelni boshqarishni ikkita usuli mavjud: an’anaviy va zamonaviy. An’anaviy fundamental va texnik tahlilda shakllanadi. Bunda tarmoqlar bo‘yicha qimmatli qog‘ozlarni diversifikasiyalash keng ko‘lamda targ‘ib qilinadi. Zamonaviy usulda esa statistik va matematik metodlardan foydalaniladi.

Investor tomonidan shakllashtiriladigan portfel bir qancha qimmatli qog‘ozlardan tashkil topib ularning har biri o‘zining kutilayotgan daromadiga ega bo‘ladi. Portfellarni birlashtirganda ularning kutilayotgan daromadlari qanday bo‘lishi investor uchun zarur.

Portfelning kutilayotshan daromadi ularning tarkibi bo‘lgan qimmatli qog‘ozlarning kutilayotgan daromadlarining o‘rtacha qiymatiga teng bo‘ladi.

$$E(r_p) = E(r_1)\cdot\theta_1 + E(r_2)\cdot\theta_2 + ... + E(r_n)\cdot\theta_n \qquad (1)$$

bunda $E(r_p)$ – portfelning kutilayotgan daromadi; $E(r_1); E(r_2); ..., E(r_n)$ - birinchi, ikkinchi va n – nchi qimmatli qog'ozlardan kutilayotgan daromadlar; $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ - birinchi, ikkinchi va n – nchi qog'ozlarning solishtirma tarkibi.

Portfeldagi qog'ozlarning solishtirma tarkibi har bir qohoz narxlarining portfelning barcha narxlari nisbati bilan hisoblanadi:

$$\theta_i = \frac{P_i}{P_p}$$

bunda θ_i – i – nchi qog'ozning solishtirma tarkibi; P_i – i – nchi qog'ozning narxi P_p - portfel narxi, bunda $\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n = 1$

Misol 1. Portfel *A* va *V* turdagi ikkita qog'ozlardan iborat. $E(r_A) = 8\%,\ E(r_B) = 6\%$ *A* – qog'oz narxi 40 ming so'm, *V* – qog'oz narxi 600 ming so'm. Portfelning kutilayotgan daromadini toping.

Yechish. Portfelning narxi: $400\ \text{минг} + 600\text{минг} = 1000\text{минг сўм}$

$$\theta_A = \frac{400}{1000} = 0{,}4; \quad \theta_B = \frac{600}{1000} = 0{,}6$$

$$E(r_p) = 8\%\cdot 0{,}4 + 6\%\cdot 6 = 6{,}8\%$$

Bu erda (1) formuladan foydalaniladi. Berilgan masalani echishda dastlab har bir qog'ozning kutilayotgan daromadini hisoblash kerak edi. Buning uchun quyidagi usuldan foydalanamiz. Aytaylik, noaniqlik sharoitida menedjer riskli qog'oz, masalan, aksiya unga turli natijalarni keltirishi mumkin deb o'ylaydi va portfelni shakllantirishda ma'lum ehtimolni qismlaridagi daromadni hisoblashni afzal ko'radi.

Misol 2. Ehtimolni hisobga olgan holda aksiyaning daromadi berilgan hol:

daromadlilik (r_i)	5	7	8	10
ehtimollik (π_i)	0,2	0,3	0,3	0,2

Aksiyaning daromadligini (samaradorligi) toping:

Bu holda aksiyaning kutiladigan daromadi ushbuga teng:

$$5\%\cdot 0{,}2 + 7\%\cdot 0{,}3 + 8\%\cdot 0{,}3 + 10\%\cdot 0{,}2 = 7{,}5\%$$

Qimmatli qog'ozning kutiladigan daromadini aniqlashning umumiy formulasi ushbuga teng:

$$E(r) = \sum_{i=1}^{n} r_i \pi_i$$

bunda $E_{(r)}$ – qog'ozning kutilayotgan daromadi;

r_i – i – nchi holatdagi qog'ozning daromadi;

π_i – i – nchi holatdagi ehtimolni yuz berishi.

Qimmatli qog'ozdan keladigan aniq daromad kutiladigan daromaddan past bo'lsa, risk yuzaga keladi deb aytamiz. Riskni miqdoriy bahosi sifatida o'rtacha kvadratik chetlanishni olamiz.

Ikkita qimmatli qog'oz uchun portfel riskini quyidagi formula bo'yicha hisoblaymiz.

$$\sigma_p^2 = \theta_A^2\sigma_A^2 + \theta_B^2\sigma_B^2 + 2\theta_A\theta_B \operatorname{cov}(r_A, r_B) \qquad (2)$$

Bu formulani korrelyatsiya koeffitsienti orqali yozsak, $corr(r_A, r_B) = \dfrac{\operatorname{cov}(r_A, r_B)}{\sigma_A \cdot \sigma_B}$ dan $\sigma_p^2 = \theta_A^2\sigma_A^2 + \theta_B^2\sigma_B^2 + 2\theta_A\theta_B corr(r_A, r_B)$.

Aytaylik, $r_{12} = +1$ бщlsin, ya'ni *A* va *V* qog'ozlar chiziqli funksional bog'lanishda bo'lsin. U holda

$$\sigma_p^2 = \theta_A^2\sigma_A^2 + \theta_B^2\sigma_B^2 + 2\theta_A \cdot \sigma_A \cdot \theta_B\sigma_B = \left(\theta_A \cdot \sigma_A + \theta_B \cdot \sigma_B\right)^2$$

ya’ni

$$\sigma_p = \theta_A\sigma_A + \theta_B\sigma_B \qquad (3)$$

(3) formuladan qog‘ozlar daromadi +1 korrelyatsiyaga ega bo‘lgan, u holda portfel riski unga kiruvchi qog‘ozlar risklarining o‘rta qiymatiga teng bo‘ladi. bunday qog‘ozlarni bitta portfelga kiritish diversifikasiyadan foydalanishga olib kelmaydi, ya’ni bunday holda diversifikasiya riskni kamaytirmaydi.

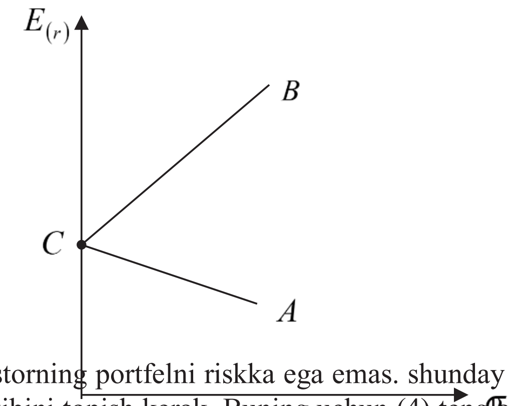
Agar $r_{12} = -1$, ya’ni r_A va r_B daromadliklar manfiy koeffitsientli chiziqli bog‘lanishda bo‘lsa u holda

$$\sigma_p^2 = \theta_A^2\sigma_A^2 + \theta_B^2\sigma_B^2 - 2\theta_A\sigma_A \cdot \theta_B\sigma_B = \left(\theta_A \cdot \sigma_A - \theta_B \cdot \sigma_B\right)^2$$

ya’ni

$$\sigma_p = \theta_A\sigma_A - \theta_B\sigma_B \qquad (4)$$

-1 korrelyatsiyali qog‘ozlarni bitta portfelga birlashtirish riskni kamaytirishga olib keladi. Bunday holda investor risk va daromad nuqtai nazardan kelib chiqib har qanday portfelni ushbu rasmda ko‘rsatilgandek *AS* va *SV* to‘g‘ri chiziqlarda yotadigan qilib shakllantirish mumkin.



S nuqtada investorning portfelni riskka ega emas. shunday portfelni shakllantirish uchun *A* va *V* qog‘ozlarni solishtirma tarkibini topish kerak. Buning uchun (4) tenglamani o‘ng qismini nolga tenglashtirib θ_A va θ_B larni topamiz.

$$\sigma_p = \theta_A\sigma_A - \theta_B\sigma_B = 0$$
$$\theta_A + \sigma_B = 1$$

Demak, $\theta_A = \dfrac{\sigma_A}{\sigma_A + \sigma_B}, \qquad \theta_B = \dfrac{\sigma_A}{\sigma_A + \sigma_B}$

Endi Markovisning minimal riskli portfelini qaraymiz.

Porfelning dispersiyasini minimallashtiruvchi θ_i ni ushbu tenglikdan

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j \operatorname{cov}\left(r_i, t_j\right)$$

quyidagi shartda

$$E(r) = \sum_{i=1}^{n}\theta_i E(r_i), \qquad \sum_{i-1}^{n}\theta_i = 1$$

topamiz.

Dispersiyani minimallashtirish riskni minimallashtirishga teng kuchli.

Shunday θ_i ni topamizki

bunda $E(r) = \sum_{i=1}^{n}\theta_i \cdot E(r_i), \qquad \sum_{i-1}^{n}\theta_i = 1$ shartlar qanoatlantirilib

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j \cdot \operatorname{cov}\left(r_i, r_i\right)} \quad \to \min$$

Bu masalaning optimal echimini θ^* bilan belgilaymiz. Agar $\theta_i^* \geq 0$ bo'lsa, u holda bu shuni anglatadiki ortiqcha pulga i – nchi turdagi qimmatli qog'ozni θ_i^* ning qismini joylashtirish kerakligini anglatadi. Agar $\theta_i^* < 0$ bo'lsa, qisqa muddatli sotish operasiyasini amalga oshirish lozim.

Aytaylik, $E(r)$ - samaradorlik va σ_2^2 portfelning riskli qismining riski. U holda portfelning umumiy samadorligi $m_p = \theta_0 r_0 + (1-\theta_0)E(r)$, portfel dispersiyasi $G_p^2 = (1-Q)^2 G_2^2$ va portfel riski $\sigma_p = |1-\theta_0|\sigma_2$ θ_0 ni yo'qotib $m_p = r_0 + \sigma_p (E(r) - r_0)/\sigma_2$, ya'ni portfelning samaradorligi uning riski bilan chiziqli bog'langan.

Bunday holda Markovisning optimal portfel haqidagi masalasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j \cdot \operatorname{cov}(r_i, r_i) \to \min \\
\theta_0 r_0 + \sum_{i=1}^{n}\theta_i \cdot E(r_i) = m_p \\
\theta_0 + \sum_{i=1}^{n}\theta_i = 1
\end{gathered} \tag{5}$$

Bu masala Tobin tomonidan quyidagicha echilgan. Aytaylik, V – riskli qog'oz turining kovarasiyasining matritsasi bo'lsin,

$X = (\theta_i)$, $M = (E(r_i))$, θ_i $i-$nchi

Turdagi riskli qog'ozning θ_i mablag' qismining vektor ustuni va bu turdagi qog'ozdan kutiladigan samaradorlik. Komponentlari 1 ga teng bo'lgan n o'lchovli vektor uchun I bo'lsin. U holda θ_i qismining optimal qiymati

$$X^* = \frac{m_p - m_0}{(M - m_0 I)V^{-1}(M - m_0 I)} V^{-1}(M - m_0 I) \tag{6}$$

Bunda V^{-1} - matritsa V ga teskari matritsa. (6) formuladagi kasr suratida, maxrajida ham son hosil bo'ladi, bu investorga bog'liq emas, $V^{-1}(M - m_0 I)$ n o'lchovli vektor ustun. Bu vektor m_p portfelning samaradorligiga bog'liq emas. shunday qilib, qimmatli qog'ozning riskli qismining vektori ham m_p ga bog'liq emas. X^* vektor komponentlaring yig'indisi m_p ga bog'liq, X^* vektorning komponentlari m_p ning o'sishiga proporsional ravishda o'sadi, shuning uchun risksiz θ_0 kamayadi. Optimal portfelning riskini uning samaradorligiga bog'lanishini ifodalaymiz. Buning uchun portfelning dispersiyasini topish formulasiga $\sigma_p^2 = X^T V X$ (6) formuladan X^* qiymatini qo'yamiz, maxrajni d^2 bilan belgilaymiz va quyidagini hosil qilamiz.

$$\sigma_p^2 = \left[\frac{(m_p - m_0)^2}{d^2}\right] \cdot \left[V^{-1}(M - m_0 I)\right]^T V \left[V^{-1}(M - m_0 I)\right] =$$

$$= \left[\frac{(m_p - m_0)^2}{d^4}\right] \cdot (M - m_0 I)V^{-1} V V^{-1}(M - m_0 I) =$$

$$= \frac{(m_p - m_0)^2}{d^2} \text{ yoki } \sigma_p = \frac{m_p - m_0}{d}$$

Optimal portfelning samaradorligini risk orqali ifodalash mumkin.

$$m_p = m_0 + \sigma_p \cdot d$$

Markovis va Tobinning maksimal samaradorlikka ega bo'lgan portfeliga doir misol keltiramiz.

Markovisning optimal portfelini shakllantirishni quyidagicha bayon qilish mumkin: barcha portfellar ichida shunday portfelni tashkil etish kerakki, uning samaradorligi berilgan portfelning samaradorligidan kam bo‘lmasin.

Portfelning qutiladigan samaradorligini maksimallashtiradigan, ya’ni

$$m_p = \sum_i \theta_i m_i \to \max$$

bo‘ladigan shunday θ_i larni topish kerakki, bunda

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j \cdot \operatorname{cov}(r_i, r_i) \to \sigma_p^2$$

shart bajarilishi lozim, bunda $\sum_i \theta_i = 1$.

Misol. Aytaylik, sarmoya portfeli uch xil qimmatli qog‘ozdan iborat bo‘lib uning samaradorligi va risklari (4;10); (10;40); (40;80) bo‘lsin. Hamda riskning yuqori chegarasi 50 ga teng. U holda qimmatli qog‘oz tarkibi mos ravishda 6%, 34% va 60% va portfel samaradorligi 27,6% bo‘ladi.

Agar bozorda risksiz qog‘ozlar bo‘lsa, u holda maksimal samaradorlikka ega bo‘lgan portfelni shakllantirish echimga ega bo‘ladi. ya’ni Tobin masalasining echimiga o‘xshaydi.

Riskli qog‘ozning optimal qismi ushbuga teng.

$$X^* = \frac{r_p}{\sqrt{(M - m_0 I)V^{-1}(M - m_0 I)}} V^{-}(M - m_0 I)$$

Matritsali – vektor ko‘rinishida portfelni maksimal samaradorlikka shakllantirish risksiz qog‘ozlar bozorida quyidagicha bo‘ladi:

$$X_0 m_0 + MX \to \max,$$

$$XVX = r_p^2,$$

$$\theta_0 + IX = 1$$

Bu shartli ekstremum masalasini echish uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$L = \theta_0 m_0 + MX + \lambda_0\left(XVX - r_p^2\right) + \lambda_1\left(\theta_0 + IX - 1\right)$$

L dan X va θ_0 bo‘yicha xususiy hosila olib nolga tenglashtiramiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta_0} = 0 \end{cases}$$

Ushbuga ega bo‘lamiz

$$\begin{cases} m_0 + \lambda_1 = 0 \\ M + \lambda_0 VX + \lambda_1 I = 0 \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamadan λ_1 ni topamiz va birinchi tenglamaga qo‘yamiz va ushbuga ega bo‘lamiz.

$$M - m_0 I = -\theta VX, \quad X = \left(-\frac{1}{\lambda_0}\right)V^{-1}(M - m_0 I)$$

λ_0 ni topish uchun X ning qiymatini $XVX = r_p^2$ tenglikka qo‘yib

$$\left(-\frac{1}{\lambda_0}\right)(M - m_0 I)V^{-1}V\left(-\frac{1}{\lambda_0}\right)V^{-1}(M - m_0 I) = r_p^2$$

Bundan

$$\left[\left(-\frac{1}{\lambda_0}\right)^2\right](M-m_0I)V^{-1}(M-m_0I)=r_p^2$$

$(M-m_0I)V^{-1}(M-m_0I)$ ni d^2 bilan belgilab $\left(-\frac{1}{\lambda_0}\right)=\frac{r_p}{d}$ ega bo'lamiz va nihoyat

$$X^*=\left(\frac{r_p}{d}\right)V^{-1}(M-m_0I) \qquad (7)$$

Portfel samaradorligini maksimal samaradorlik bilan ifodalash maqsadida uning riski r_p orqali bog'lanishini topamiz, ya'ni $\theta_1^* m + MX^*$ ni qiymatini topamiz, bunda θ_1^* va X^* optimal tarkiblar.

$\theta_1^* = 1 - IX^*$ ni topamiz, bu ifodani (7) formuladagi X^* ga qo'yamiz va ushbuga ega bo'lamiz.

$$\theta_1^* m_0 + MX^* = \left(1 - I\left(\frac{r_p}{d}\right)V^{-1} + (M-m_0I)\right)m_0 + M\left(\frac{r_p}{d}\right)V^{-1}(M-m_0I)=$$

$$= m_0 + (r_p/d)(M-m_0I)V^{-1}(M-m_0I) = m_0 + dr_p$$

Ko'rinib turibdiki, bu bog'lanish chiziqli. Bu optimal portfelni Tobinning maksimal daromadli portfeli deb yuritamiz.

Xulosa. Bu maqolaning maqsadi qimmatli qog'ozlar optimal sarmoya portfelidan keladigan daromadlarni maksimallashtirish va minimal risk modelini tuzishdir. Buning uchun biz Markovis modelining takomillashtirilgan holi Tobin modelini tuzish variantlarini ko'rdik. Tobin metodini barqaror fond bozorlariga tadbiq etish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Adabiyotlar

1. Markowitz Harry. Portfolio selection // The Journal of Finance, vol 7. №1. P. 77-91.
2. J. Jobin. Liquidity Preference as Behavior Towards Risk: The Review of Economic studies, Vol. 25. № 2.
3. Кох И.А. Портфелное инвестирование методологические подходы / И.А.Кох – Казан Казанский государственный университет, 2009. 54 с.
4. Sh.A.Saipnazarov «Biznes matematika» T. 2023.